课程编号：A073003 北京理工大学2014-2015学年第一学期

**线性代数A试题 B卷**

一、（10分）已知矩阵，，且，求.

解：由知

，

而, 所以



故而,



二、（10分）已知



（1）求向量组的秩和一个极大无关组;

（2）用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

解: (1)



所以求向量组的秩为3, 为极大无关组.

(2) .

三、（10分）在中，求自然基到基的过渡矩阵，以及在后一个基下的坐标。

解：过渡矩阵

在后一个基下的坐标



四、（10分）设*V*是由实数域上的全体2阶矩阵构成的线性空间，在*V*上定义映射：，其中*X*为任意矩阵，为*V*中某一取定矩阵。

（1）证明：为*V*上的而一个线性变换；

（2）证明：对任意的都有；

（3）求在基下的矩阵。

解：（1）对任意的，都有



所以为*V*上的而一个线性变换。

（2）对任意的有



（3）根据的定义，有



在基下的矩阵为



五、（10分）设矩阵***A***和***B***相似，其中，

（1）求***x***和***y***的值；（2）求可逆矩阵***P***使得.

解:（1）由矩阵相似的特征值的性质,

*x*=2+*y*， *—x*=*y*

解之得*x*=1，*y=—*1.

（2）*A*的特征值为*—*1，1，1，

对应的线性无关的特征向量分别是

取则.

六、（10分）设***A***是6阶方阵，且已知存在6阶可逆矩阵***P***，使得



1. 试写出***A***的初等因子；
2. 判断***P***的哪几列是***A***的特征向量。

解 (1) *A*的初等因子为 .

(2)由*AP=PJ*,得*P*的第一列,第三列,第四列,第六列是分别对应于的特征向量.

七、（10分）证明：若***n***阶方阵***A***有***n***个线性无关的特征向量，则***A***一定可以对角化。

证明：设*A*的*n*个线性无关的特征向量为，对应的特征值为

即



也即



令，则上式化为



由于线性无关，所以



故而*A* 可以相似对角化。

八、（10分）已知二次型，其中

1. 判断该二次型的定性；
2. 用正交变换将其化为标准形并给出所用的正交变换。

解：（1）由，

得*A*的特征值为，所以二次型半正定。

(2) 由（1）, *A*的特征值为.

的特征向量为，

将其正交化有，

单位化，

的特征向量为，

单位化，

取,作正交变换*X*=*QY*,二次型化为.

九、（10分）设方程组

(1) 证明：若两两不相等，则此方程组无解；

(2)设，且已知是方程组的两个解，其中，写出此方程组的通解。

（1）证明：方程组增广矩阵行列式为范德蒙行列式，

当两两不相等时，，所以方程组增广矩阵的秩=4，而系数矩阵的秩，故方程组无解。

（2）当，原方程组等价于



此时方程组系数矩阵的秩为2，所以基础解系中只有一个解向量，令

，

则方程组的通解为

.

十（10分）已知四阶矩阵*A*=

1. 求|*A*|
2. 证明: 有两个正特征值和两个负特征值。

（1）解：

（2）证明:为四阶实对称矩阵，因此其特征值为实数。

由 得 ， （1）

这说明的特征值或全为正，或全为负，或两正两负。

由 得 ， （2）

由（1）（2）可知矩阵的特征值必有2个为正数，2个为负数。证毕。